Université Mohammed Premier
ENSA d'Al-Hoceima
A. BOUJRAF

Filières : AP2
Matière : Analyse numérique
Année Universitaire : 18/19

Devoir surveillé : Durée (1h30)

Exercice 1. Soient la matrice A et le vecteur colonne b donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet une décomposition de Cholesky.
2. Déterminer la décomposition de Cholesky de A, puis résoudre le système linéaire $Ax = b$.

Exercice 2. On considère le système linéaire $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} & 1 & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

1. Justifier pourquoi la matrice A admet une décomposition LU.
2. Donner la décomposition LU de la matrice A.
3. Resoudre le système $Ax = b$ en utilisant la décomposition LU précédente.
4. En déduire l'inverse de la matrice A.

Exercice 3. On considère la fonction définie par $f(x) = cos(x) - xe^x$.

1. Monter que f possède un unique zéro α dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. a. Approcher α en utilisant la méthode de dichotomie avec deux itérations.
   b. Donner le nombre itérations nécessaire pour trouver une valeur approchée de α avec la précision 10^{-2} en utilisant la méthode de dichotomie.
3. a. Ecrire la methode de Newton pour la recherche de la solution de $f(x) = 0$.
   b. Effectuer 3 itérations de la méthode de Newton (avec 4 décimales) à partir de $x_0 = 0$.
4. Numériquement, quelle est la méthode la plus rapide.
5. a. Verifier que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente au problème du point fixe de la fonction g définie par $g(x) = \frac{\cos(x)}{e^x}$.
   b. Montrer que les hypothèses d'application de la méthode de point fixe ne sont pas vérifiées sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   c. Montrer qu'elles le sont sur l'intervalle $[0.4199, 0.6038]$.
   d. Combien de termes devrait-on calculer par la méthode du point fixe pour trouver une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA d'Al-Hoceima
A. BOUJRAF

Filières : AP2
Matière : Analyse numérique
Année Universitaire : 18/19

Examen : Durée ($1h30$)

Questions de cours.
Quelles sont les deux types de méthodes vues dans le cours pour la résolution d'un système linéaire ? Donner la différence entre ces deux types de méthodes (avantages et incovénients).

Exercice 1.
On considère le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A admet une décomposition LU que l'on déterminera. En déduire la résolution du système $AX = b$.
2. La méthode de *Jacobi* pour la résolution de ce système est-elle convergente ? Effectuer deux itérations de la méthode de *Jacobi* à partir de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.
3. La méthode de *Gauss-Seidel* pour la résolution de ce système est-elle convergente ? Effectuer deux itérations de la méthode de *Gauss-Seidel* à partir de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

Exercice 2.

1. Ecrire le polynôme $p(x) = 1 - x + x^2$ dans la base de *Lagrange* associée aux points -1, 2, 3.
2. Ecrire dans la base de *Lagrange* le polynôme q qui vaut -55, 104, 1.063 en -1, 2, 3.
3. Ecrire le polynôme $p(x) = 1 - x + x^2$ dans la base de *Newton* associée aux points -1, 2, 3.
4. Trouver r le polynôme qui vaut 3, 3, 7, 8 en -1, 2, 3, 4.
5. Quels sont les "avantages" et les "inconvenants" des bases de *Lagrange* et de *Newton* ?

Exercice 3.
Soient $N \in \mathbb{N}$, f la fonction définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = \sqrt{x}$, $x_j = 1 + jh$ où $j = 0, 1, \dots, N$ et $h = \frac{1}{N}$. Soit également $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ et P_i le polynôme interpolant f en x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. Pour $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ et $t \in [i-1, i+1]$, on pose $x = 1 + th$, $g_i(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})$ et $\phi_i(t) = (t - i + 1)(t - i)(t - i - 1)$.

1. Donner l'expression de l'erreur d'interpolation $e_i(x) := f(x) - P_i(x)$ puis montrer que $|e_i(x)| \leq \frac{h^3}{8}$.
2. Etablir le tableau de variation de la fonction $t \longrightarrow \phi_i(t)$ pour $t \in [i-1, i+1]$.
3. Vérifier que $g_i(x) = h^3 \phi_i(t)$ et en déduire que $|e_i(x)| \leq \frac{h^3}{24\sqrt{3}}$ pour tout $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$.
4. Comment choisir N pour que l'erreur d'interpolation soit inférieur ou égale à $\varepsilon = 5.10^{-8}$.

Université Abdelmalek Essaadi
ENSAH d'AL-Hoceima,
A.P., Deuxième année,
Année universitaire 2018-2019,

Module CP41-1 : Épreuve de Probabilité et Statistique.

Examen, Durée : 1h30min.

N.B. : Il sera tenu compte de la rédaction, la justification de réponses et la clarté de l'écriture.
***L'échange de calculatrices est complètement interdit.**

Exercice 1 *(7 points)*
On considère l'univers $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;0\}$ et l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, on définit les variables aléatoires $X : \Omega \mapsto J_X$ et $Y : \Omega \mapsto J_Y$ par le tableau suivant :

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$X(\omega)$	1	1	0	0	2	2	2	-1	-1	3
$Y(\omega)$	1	0	0	1	0	1	2	1	0	0

Les éventualités ayant toutes la même probabilité.

1. Déterminer J_X et J_Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles discrètes ou continues? **Justifier.**
2. Donner la loi de probabilité de X, puis de Y.
3. Donner la loi conjointe du couple (X,Y). **Justifier** voir $[(X,Y)=(k,l)] = [X=k] \cap [Y=l]$
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes? **Justifier**

Exercice 2 *(13 points)*
Soient $(\mathbb{R}, \tau, P)$ un espace probabilisé. On considère la fonction f définie par :

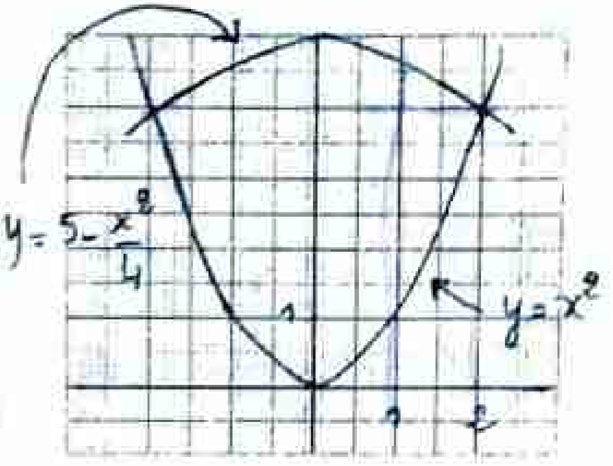
$$f(t) = A(\rho)\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\rho^2}\right),\ t \in \mathbb{R}$$

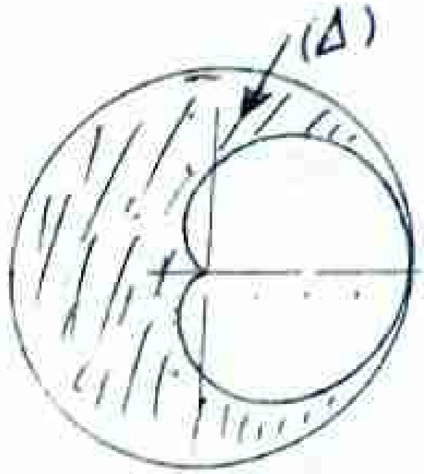
où $A : \rho \mapsto A(\rho)$ est une fonctions numérique.

1. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{2\pi}$.
   (a) Rappeler la définition de la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X.
   (b) Déterminer $A(\rho)$ pour que la fonction f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
   (c) Déterminer le domaine de définition de la fonction A.
   (d) Déterminer la moyenne $\mathbb{E}(X)$, la variance $\sigma^2(X)$ et l'écart-type de la v. a. X.
   (e) Que peut-on déduire concernant la v.a. X ?
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \frac{X-\mu}{\rho}$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\sigma^2(Y)$ et l'écart-type de la v.a. Y.
   (b) Déterminer la densité de probabilité $y \longmapsto g(y)$ de la v. a. Y.
   (c) Que peut-on déduire sur Y ?
3. On considère la fonction Π définie par $\Pi : y \longmapsto \int_{-\infty}^{y} g(t)dt$.

$EY = \frac{E(X) - \mu}{\rho}$

2pt 2) Soit $a > 0$. Trouver l'aire du domaine Δ intérieur au cercle d'équation polaire : $r = 2a$ et extérieur à la cardioïde d'équation polaire : $r = a(1 + cos\theta)$.





Exercice 3 : (8,5 points)

A) Considérons la forme différentielle :

$$\omega(x,y) = y\,dx + (e^x - 1)dy.$$

1pt 1- *Montrer que ω n'est pas exacte.*

1,5pt 2- *Trouver $\psi(x)$ telle que : $\psi(x)\omega$ soit exacte et $\psi(0) = 2$.*

1pt 3- *Déterminer une fonction f telle que : $\psi(x)\omega = df$.*

1,5pt 4- Calculer l'intégrale de ω le long du chemin γ paramétré par :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad avec\ t\epsilon[0, \pi]$$

1pt 5- Calculer l'intégrale de $\psi(x)\omega$ le long du même chemin γ.

B) *On considère la forme différentielle:*

$$\mu(x,y) = \left(\frac{1}{x} + 2xy\right)dx + (x^2 + y)dy$$

0,5pt 1- *Montrer que μ est fermée.*

1pt 2- *μ est-elle exacte?*

3- *Considérons*

$$g(x,y) = ln|x| + x^2y + \frac{y^2}{2}$$

1pt *Déterminer le champ vectoriel* $\overrightarrow{grad}\,g$.

Ramadan Karim !!